Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Fiche de cours Analyse Numérique DEMI2E

Année universitaire 2013/2014

MR. BEY M-A

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DÉCISION ET DES ORGANISATIONS

LES SYSTEMES LINEAIRES

En analyse numérique, résoudre un système linéaires, c'est résoudre

$$Ax = b$$

Où A est une matrice (à priori) inversible , b est un vecteur, et X est le vecteur inconnu.

Les questions attenantes à ce problème sont :

Calculer $\mathbf{A^{-1}}$, **Det(A), valeurs propres de A, vecteurs propres de A**

Une dizaine de méthodes existent, mais certains outils sont commun à de nombreuses méthodes… (Pivot de Gauss, Décomposition en matrice triangulaire, Méthode de substitution)

Un tel système est facilement soluble dans le cas où la matrice **A** est triangulaire…

Pourquoi ?

Par ce qu'une simple substitution itérative permet de résoudre facilement le système
Ex :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Matrice NxN
avec N=4

On a alors :

$$x_4 = b_4 / a_{44}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - x_4 a_{34}\right)$$

$$etc...$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

D’une manière générale, on peut trouver toutes les valeurs de X_i par la méthode itérative suivante (**substitution arrière)**

$$x_N = b_n / a_{nn}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j \right]$$

On calcule X_n, puis X_{n-1}, X_{n-2} … X_1

Une méthode similaire marche aussi pour un matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right]$$

On calcule X_1, puis X_2, X_3 … X_N

Substitution avant

Dans de nombreuses méthodes, l'objectif est de transformer **A** pour la rendre Triangulaire, inférieure ou supérieurs, et ensuite calculer les solutions en utilisant une substitution (avant ou arrière si A est inférieure ou supérieure).

2 grandes méthodes EXACTES:

ELIMINATION DE GAUSS JORDAN

Simple à comprendre, mais nécessite de modifier **b** en même temps que **A**
Ne donne pas directement $\mathbf{A}^{-1}$ et les vecteurs propres

FACTORISATION L U

Un peu plus subtile, ne modifie pas **b**, donc on peut utiliser la même décomposition pour tout vecteur **b**, donne **A-1** et les vecteurs propres

Gauss Jordan (pivot de Gauss)

Prenons l'exemple suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ x+3y-2z & = & -1 & L_2 \\ 3x+5y+8z & = & 8 & L_3 \end{array}\right.$$

On conserve la ligne L1, qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue x des autres lignes; pour cela, on retire L1 à L2, et 3 fois L1 à L3. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y+2z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

On conserve alors la ligne L2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne; pour cela, on remplace la ligne L3 par L3-L2. On trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z & = & 2 & L_1 \\ y-4z & = & -3 & L_2 \\ -2z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{array}\right.$$

On rèsoud finalement le système par substitution arrière
(car on résoud d'abord Z , puis Y, puis X)

Comment cela se passe avec des matrices ??

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z &=& 2 & L_1 \\ x+3y-2z &=& -1 & L_2 \\ 3x+5y+8z &=& 8 & L_3 \end{array}\right.$$

pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z &=& 2 & L_1 \\ y-4z &=& -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y+2z &=& 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y+2z &=& 2 & L_1 \\ y-4z &=& -3 & L_2 \\ -2z &=& -1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le pivot parcours la diagonale

Pivot de Gauss
4 principes fondamentaux

On ne change pas la solution lorsque l'on :

1. permute 2 lignes
2. permute 2 colonnes
3. divise par un même terme non nul les éléments d'une ligne
4. ajoute ou retranche à une ligne un certain nombre de fois une autre ligne

<u>Stratégie</u> : Transformer le système linéaire
en un système équivalent … facile à résoudre

Triangulaire !

Pivot de Gauss : un autre exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

pivot (1)

Attention aux valeurs nulles du pivot

Pivot de Gauss : un exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ \boxed{x_1 + 3x_2 + x_4 = 0} \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

L2 = L2-L1 a_{21}/pivot (1)

Pivot de Gauss : un exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

L2 = L2-L1 a_{21}/pivot (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ 0 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Pivot de Gauss : un exemple

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & & =-6 \\ x_1 & +3x_2 & & +\ x_4 & =\ 0 \\ 3x_1 & -\ x_2 & +\ x_3 & +2x_4 & =\ 8 \\ & -\ x_2 & +2x_3 & +\ x_4 & =\ 6 \end{cases}$$

L3 = L3-L1 a_{31}/pivot (1)

$$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & & =-6 \\ 0 & +\ x_2 & +\ x_3 & +\ x_4 & =\ 3 \\ 0 & -\ 7x_2 & +\ 4\,x_3 & +2x_4 & =\ 17 \\ & -\ x_2 & +2x_3 & +\ x_4 & =\ 6 \end{cases}$$

Le première variable à été éliminée de toutes les équations sauf une

L'algorithme du pivot de Gauss

Triangularisation

$A\,x = b$

On voit que si $a_{kk} \sim 0$, on introduit une instabilité dans le système

pour $k = 1$ jusqu'à $n-1$

$\quad pivot \leftarrow a_{kk}$ (* stratégie de pivot *)

$\quad$ si $pivot \neq 0$ alors

$\quad\quad$ pour $i = k+1$ jusqu'à n

$$b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{pivot} b_k$$

$\quad\quad\quad$ pour $j = k+1$ jusqu'à n

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{pivot} a_{kj}$$

$\quad\quad\quad$ fait

$\quad\quad$ fait

$\quad$ sinon "problème"

fait

Représentation Matricielle du Pivot de Gauss pour une matrice NxN

$$\text{pour} \quad i = k+1,\ldots,n \quad \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} \leftarrow a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad \text{pour } j = k+1,\ldots,n \\ b_i^{(k+1)} \leftarrow b_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} \end{cases}$$

$$\text{matriciellement}: A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)}; \quad b^{(k+1)} = M^{(k)} b^{(k)};$$

À chaque étape a_{kk} est le pivot.

Remarques

Choix du pivot : minimiser les erreurs d’arrondis

si un pivot est nul, on permute deux lignes

si tous les pivots restant sont nuls ⇒ la matrice est singulière

(*i.e*. le système d’équations n’admet pas de solution unique)

pour minimiser les erreurs d’arrondis :

on choisi le plus grand pivot possible (en valeur absolue)

et donc on permute les lignes (voir les colonnes associées)

c’est la stratégie du pivot maximal (partiel (lignes) ou total)

déterminant d’une matrice = produit des pivots

Problème de la méthode du pivot de Gauss seule :

Nécessite de modifier **b** ,

Donc pour résoudre **Ax=b** et **Ax'=b'** il faut recommencer la procédure deux fois

Il faudrait une méthode qui ne modifie pas **b**

=> **Décomposition LU**

Décomposition LU

Supposons que nous sommes capables d'écrire la matrice **A** sous la forme d'une produit de deux matrices triangulaires L (lower) et U (upper)

L x U = A

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ 0 & & & u_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Triang. Inférieure (lower)

Triang. Supérieure (upper)

Alors résoudre **Ax=b** peut aussi s'écrire

Ax=(L U) x = L (U x) = b

Que l'on peut décomposer en deux étapes, avec une variable intermédiaire : **y**

Ax=b ⇔ (LU)x=b ⇔ L (Ux) = b ⇔ L y=b avec y=Ux

1. Résoudre **L y =b**
2. Résoudre **U x =y**

Intérêt de la méthode :

Si on connaît **L** et **U** les étapes (1) et (2) se résolvent simplement
En appliquant pour (1) une substitution avant (L est **triangulaire** inf.)
En appliquant pour (2) une susbstitution arrière (U est triangulaire sup.)

De plus on peut calculer simplement l'inverse de A, on ne touche pas à b

On peut montrer qu'en temps normal il existe une infinité de décomposition LU Si A est inversible.

Cependant il n'existe qu'une seule décomposition telle que L ait pour éléments diagonaux des « 1 » uniquement:

Pour Calculer L et U facilement on se sert de **la méthode du pivot de Gauss**, en utilisant une matrice intermédiaire un peu spéciale, : la **matrice augmentée**

Exemple : Soit à Résoudre :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On peut écrire ce système manière plus compacte avec la **matrice augmentée** (qui n'est plus carré…)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

Matrices augmentées

On peut garder la trace des différentes étapes du pivot de gauss en considérant
La matrice augmentée

1ere étape : Pivot avec a_{11} : La 2eme ligne =L2- 4/1 x L1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4-4 & 3-8 & 1+4 & 3-8 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Nouvelle matrice A

Nouveau vecteur b

Idée géniale : Au lieu de garder le 0 dans la nouvelle matrice augmentée
On conserve dans cette case le coefficient par lequel on a multiplié L1

On a changé le 0
En 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Maintenant on echange L3=L3-2/1 L1

Nouvelle augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Au lieu du 0 ici, on a mis le « 2 » par lequel on avait multiplié L1

On pivote maintenant sur la ligne 2, le pivot vaut « -5 » (a_{22})

L2 ne change pas, et L3=L3 - (-2/-5) L3

Au lieu des 0 on a conservé les coefs. multiplicateurs

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2/5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 \\ 2 & 2/5 & 3 \end{pmatrix}}\ \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{matrix}}$$

Augmentée finale.
On en déduite la forme triangulaire de A et la nouvelle forme de b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Et on trouve X par substitution classiquement

Alors, pourquoi tout cela, le rapport avec L et U?

Et bien on peut montrer que

=U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2/5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

~ L

Plus précisement, on divise chaque colonne par l'élément diagonal pour mettre des 1 sur la diagonale de L

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2/25 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vous pourrez vérifier que **LxU=A** !!

ALGORITHME DE CROUT ($r_{ij}=u_{ij}$ et $l_{ij}=l_{ij}$ avec nos notations)

pour j de 1 à n faire

pour i de 1 à j faire // Calcul des $r_{i,j}$ **Matrice U**

$r_{i,j} \leftarrow a_{i,j}$

pour k de 1 à $i-1$ faire

$r_{i,j} \leftarrow r_{i,j} - l_{i,k} r_{k,j}$

fin pour

fin pour pour i de $j+1$ à n faire // Calcul des $l_{i,j}$

$l_{i,j} \leftarrow a_{i,j}$ **Matrice L**

pour k de 1 à $j-1$ faire

$l_{i,j} \leftarrow l_{i,j} - l_{i,k} r_{k,j}$

fin pour

$l_{i,j} \leftarrow l_{i,j} / r_{j,j}$

fin pour

fin pour

Une fois qu'on possède la décomposition LU, on obtient aisément
:

Le déterminant :

$Det(A)=Det(L)*Det(U) = u_{11} x\ u_{22} x \ldots x\ U_{nn}$

La matrice inverse :

On résoud successivement pour toute dimension
$A\ x_j = e_j$ où e_j est le vecteur unitaire de la dimension j
=> En combinant tous les x_j on trouve successivement toutes les colonnes de la matrice A^{-1}

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Avantage de la méthode L-U : On ne calcule que L et U qu'une seule fois